

CAPÍTULO

7

Técnicas de Integração
Usando o Maple**Objetivos Deste Capítulo**

Aprender os seguintes métodos manuais de integração:

1. Mudança de variável
2. Integração por partes
3. Substituição trigonométrica
4. Frações parciais
5. Integração numérica

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

`changevar(x = 10*tan(theta), c, theta);` Parte do pacote `student`. O comando realiza a mudança de variáveis em um integração.

`expand(c2);` O já familiar comando para distribuir os produtos nas somas.

`isolate(eq, Int(exp(x)*sin(x), x));` Parte do pacote `student`, similar ao comando *solve*.

`op(1, c1);` Extrai subexpressões de uma expressão.

`Simplify(c1, symbolic);` Utilize esta forma do comando *simplify* quando estiver trabalhando com raízes.

`Solve(eq, Int(exp(x)*sin(x), x));` O comando `solve` pode resolver uma integral na forma inerte, efetivamente isolando-a no lado esquerdo da equação.

A Necessidade Das Técnicas de Integração

Se você completou o Maple Lab do ultimo capítulo, você já chegou a conclusão que o importante é ser capaz de montar uma integral e depois deixar o Maple resolve-la. Você pode deixar que o Maple tome conta de duas coisas: achar a antiderivada e fazer as computações matemáticas, assim como substituir pelos limites de integração. Você pode se aventurar numa classe superior de problemas quando você usa um sistema de computação algébrica. A razão é que você não tem a necessidade de ter na memória uma lista imensa de fórmulas para antiderivadas antes que você possa tentar resolver os problemas de integral.

Algumas vezes, porém, o Maple precisa de ajuda. É possível que uma expressão possa ser integrada sem que o Maple consiga encontrar a resposta. Se você sabe algumas das técnicas de integração, você pode ser capaz de ajudar o Maple, até que encontre a resposta. Também é útil saber algumas das formas que os matemáticos integravam expressões antes da facilidade da computação algébrica. (Até porque alguém tinha que programar os algoritmos do Maple)

Este capítulo demonstra as técnicas mais comuns para integrar expressões um ou dois níveis de dificuldade acima das fórmulas básicas. Estes métodos ajudam a compreender a mecânica de achar uma antiderivada. Muitos dos exemplos requerem comando que são encontrados no pacote student. Este pacote é uma coleção de rotinas que o ajudam a visualizar parte do cálculo. Como o Comando `middlebox` que você já conhece e outros comandos que vão ajuda-lo a realizar resoluções passo a passo de problemas de integração. Emita o comando

>with(student);

Pare certificar-se de que todas as rotina usadas neste capitulo estão disponíveis em sua seção do Maple.

Mudança de Variável

Considere a tarefa de achar a antiderivada de $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$. O integrando é composto de duas funções elementares, $\ln(x)$, e $1/x$. A antiderivada de $\ln(x)$ é $x\ln(x) - x$, e a antiderivada de $1/x$ é $\ln(x)$, mas, qual a antiderivada de $\ln(x)/x$? Como o fato de sabermos antiderivadas elementares pode nos ajudar a resolver um problema de integração quando as duas funções são multiplicadas juntas?

A observação chave é que esta integral pode ser transformada em um problema elementar pela mudança de variável. Sendo $u = \ln(x)$. Então, o diferencial de u é $du = 1/x \, dx$. Logo, a mudança de variável, $u = \ln(x)$, transforma $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ em $\int u du$ (ultima integral é uma elementar.) Aplicamos a fórmula da lei da potência, já que $u = u^1$, para obter $\int u du = \frac{1}{2} \ln(x)^2 + C$ e finalmente podemos substituir novamente e trocar u com $\ln(x)$ e du com $1/x \, dx$ para obter $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(x)^2 + C$. Nós achamos a resposta para o problema de integração por mudança de variável.

Exemplo 7-1

Ache $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Resolução : Esta é uma integral definida. No caso de integrais definidas, nós podemos evitar a re-substituição desde que nos lembremos de mudar os limites de integração quando fizermos a substituição $\ln(x) = u$. Já que $\ln(1) = 0$ e $\ln(e) = 1$, a mudança de variável produz $= \int_0^1 u du$. Sabemos que a solução da ultima integral é $u^2/2$. Avaliando esta expressão ao limite superior temos $1/2$, e ao limite inferior, 0. Logo o valor desta integral definida é $1/2$. Este resultado é facilmente verificado usando o Maple.

`>int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)) = int(u, u = 0 .. 1);`

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nós chegamos a uma importante conclusão. No caso de integrais definidas, se o problema puder ser resolvido pela mudança de variáveis.

Sua vez. Calcule $\int_0^{1/2^p} \sin(x) \cos(x) dx$. Dica: aceite $\sin(x) = u$ e calcule du .

Resposta: _____

O pacote `student` contém um comando chamado *changevar* para ajuda-lo a verificar o seu trabalho quando realizar uma mudança de variável. O comando é um pouco “temperamental” quanto a questão de como a relação da variável é escrita. Nós o usamos aqui para checar a transformação no Exemplo 7-1:

>Int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)) = changevar(ln(x) = u, Int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)));

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_0^1 u du$$

O comando fez o seu trabalho. A integral foi transformada em uma integral elementar e confirmou o nosso trabalho de papel e lápis no exemplo 7-1. Note, porém, o efeito de escrever a equação da mudança de variável ao contrario:

>Int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)) = changevar(u = ln(x), Int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)));

Error, (in changevar) usage ; changevar(g(a) = f(b), F(..), b)

Escrever a equação desta forma confundiu o Maple. Você pode clarear o que quer dizer especificando ao Maple o nome da variável a ser transformada, neste caso, u listando-o como terceiro parâmetro do comando:

>Int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)) = changevar(u = ln(x), Int(ln(x)/x, x = 1 .. exp(1)), u);

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_0^1 u du$$

Agora o Maple entende! Quando estiver usando o comando *changevar*, lembre-se do que fazer se receber uma mensagem de erro a respeito de seu uso: trocar o lado direito com o lado esquerdo da equação ou dizer ao Maple o nome da nova variável usando um terceiro parâmetro no comando. A melhor maneira é sempre dar o terceiro parâmetro ao comando.

Exemplo 7-2

Pode não ser obvio qual relação da mudança de variável vai funcionar. O comando *changevar* realiza o trabalho de testar diferentes equações bem mais simples. Use-o para simplificar

$$C := \int \frac{\arcsin(5x)}{\sqrt{1-25x^2}} dx.$$

Resolução A escolha da mudança de variável não é óbvia para qualquer pessoa que não tenha feito um problema similar anteriormente. Já que a função arcsine parece ser a mais problemática, pode ser uma boa idéia elimina-la pela transformação $x = \sin(u)$:

>chnagevar(x = sin(u), c, u);

$$\int \frac{\arcsin(5\sin(u)) \cos(u)}{\sqrt{1-25\sin(u)^2}}$$

Agora as coisas parecem mais complicadas, mas antes de tentar algo completamente diferente observe que a expressão seria simplificada se tivéssemos $\arcsin(\sin(u))$ ao invés de $\arcsin(5(\sin(u)))$. Tente a substituição, $5x = \sin(u)$;

>changevar(5*x = sin(u), c, u);

$$\int \frac{\arcsin(\sin(u)) \cos(u)}{5\sqrt{1-\sin(u)^2}} du$$

Agora temos $\arcsin(\sin(u))$. Porque o Maple não simplificou? $\arcsin(x)$ não é uma função. Possui infinitas soluções para qualquer u . Para instruir o Maple para aceitar como função, use *simplify ... symbolic*:

>simplify (changevar(5*x = sin(u), c, u), symbolic);

$$\frac{1}{5} \int u du$$

Chegamos a mesma integral do exemplo 7-1, exceto pelo fator $1/5$. Seu valor é obviamente $u^2/10 + C$.

Existe alguma outra transformação que simplifique a integral? Tente $u = \sqrt{1-25x^2}$. O resultado é

>ex1 := simplify(changevar(u = sqrt(1-25*x^2), c, u), symbolic);

$$\text{ex1} := -\frac{1}{5} \int \frac{\arcsin(\sqrt{1-u^2})}{\sqrt{1-u^2}} du$$

Desde que o termo de raiz quadrada no denominador é a derivada do termo de raiz quadrada do numerador, exceto por um termo constante, podemos continuar substituindo $v = \sqrt{1-u^2}$.

>simplify(changevar(v = sqrt(1-u^2), ex1, v), symbolic);

$$\frac{1}{5} \int \frac{\arcsin(v)}{\sqrt{1-v^2}} dv$$

Infelizmente tudo que conseguimos fazer foi aplicar a transformação

>changevar(v = 5*x, c, v);

$$\int \frac{1}{5} \frac{\arcsin(v)}{\sqrt{1-v^2}} dv$$

Esperamos que este exemplo tenha mostrado que existe um risco de andar em círculos quando procurando por uma mudança de variável adequada. Ainda, é a única maneira de ganhar experiência é tentando e errando.

Sua vez. Ache uma possível mudança de variável para $c := \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(q)}{\sqrt{1+\cos(q)}} dq$. Dica: tente $x^2 = \cos(q)$ e procure outra transformação simples.

Resposta: _____

Integração Por Partes

A fórmula para a integração por partes pode ser encontrada expandindo o diferencial do produto de duas funções, u e v .

$$D(u \cdot v);$$

$$D(u)v + u D(v)$$

A antiderivada deste diferencial tem que ser uv , enquanto a antiderivada da forma expandida tem que ser $\int v du + \int u dv$. Tradicionalmente a fórmula é escrita $\int u dv = uv - \int v du$.

A integração por partes é uma ferramenta poderosa. Surpreendentemente, pode ser usada como vantagem mesmo quando não é obvio que existam dois produtos de funções.

Quando realizando integração por partes, você deve ser capaz de integrar a parte que você escolha como v . Faça uma tabela e complete todos os valores (Tabela 7.1).

Fazer a tabela é um importante primeiro passo. Ajuda manter controle das substituições que você tem que fazer enquanto trabalha a fórmula

Naturalmente, o Maple tem um comando no pacote `student` para ajuda-lo. É chamado *intparts*. O exemplo seguinte mostra como trabalhar uma integração simples à mão e depois usando a ajuda do Maple.

Exemplo 7-3

Use a técnica de integração por partes para encontrar $c := \int x\sqrt{1-x} dx$.

Resolução: Primeiro complete a tabela 7.2

Da tabela , substitua na fórmula para integração por partes

$$u \cdot v - \text{Int}(v, u) = x \cdot (-2/3 \cdot (1-x)^{3/2}) - \text{Int}(-2/3 \cdot (1-x)^{3/2}, x);$$

$$uv - \int v du = -\frac{2}{3} x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

Tabela 7.1
Integração de v

$u =$

$dv =$

$du =$

$v =$

Tabela 7.2

Tabela para exemplo 7-3

$u = x$	$dv = \sqrt{1-x} \cdot dx$
$du = dx$	$v = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$

Uma vez que você compreende que $d(1-x) = -dx$, a integral na direita é reduzida a $\int v^n dv$. O resultado é

$$-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}$$

Agora faremos o mesmo problema com a ajuda do Maple. O comando *intparts* requer duas quantidades, a integral e a parte a ser diferenciada, dv.

>intparts(c, x);

$$-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

O mesmo resultado que obtivemos pelo método manual. O Maple fez o trabalho matemático de determinar u, du e dv, dado v. Realizou as substituições e apresenta resultados em termos de um termo completamente avaliado e uma nova integral. Se a integração por partes der trabalho, a integral transformada deve ser mais fácil de achar do que a integral original.

Sua vez. Ache, usando integração por partes, $c := \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$.

Resposta: _____

Exemplo 7-4

Pode ser necessário aplicar integração por partes mais de uma vez para avaliar completamente a integral.

Aqui, usaremos a integração por partes para avaliar $c := \int e^x \sin(x) dx$.

Resolução:

> c1 := intprts(c, sin(x));

$$c1 := e^x \sin(x) - \int \cos(x) e^x dx$$

Tivemos sucesso transformando uma integral contendo um termo seno em uma integral contendo um termo coseno. Não parece que nenhum progresso foi feito mas, vamos adiante aplicando a integração por partes mais uma vez.

>c2 := intparts(Int(exp(x)*cos(x), x), cos(x));

$$c2 := \cos(x)e^x - \int -e^x \sin(x) dx$$

Vemos que o que aconteceu foi que após duas aplicações da integração por partes a integração original reaparece. Equacionando estes resultados produzimos

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \cos(x)e^x + \int -e^x \sin(x) dx$$

Podemos construir esta equação das quantidades previamente nomeadas usando o comando `op` para seleccionar o primeiro termo de `c2`:

>op := c = op(1, c1) - expand(c2);

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx$$

Resolvendo a equação da integral temos:

>Int(exp(x)*sin(x), x) = solve(eq, Int(exp(x)*sin(x), x));

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} e^x \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) e^x$$

Dois pontos devem ser ressaltados. Primeiro, nós usamos o comando *expand* para tirar o sinal negativo da integral. Enquanto não fizermos isso, o Maple vai tratar a integral em `c2` como diferente da original, e o comando `solve` não vai funcionar. Também, perceba que nós usamos o comando `solve` para resolver uma expressão complexa, a própria integral, ao invés de buscar uma simples variável, como temos feito na maioria dos casos até agora.

Já que carregamos o pacote `student`, o comando `isolate` está disponível, que permite uma maneira ainda mais fácil de resolver a integral:

>isolate(eq, Int(exp(x)*sin(x), x));

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} e^x \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) e^x$$

O *isolate* expressão o resultado como uma equação, posicionando a quantidade que deve ser isolada para o lado esquerdo da equação.

Sua vez. Ache, usando integração por partes, $c := \int \frac{\cos(x)}{e^x} dx$.

Resposta: _____

Você pode ter pensado no fato de termos ignorado a constante de integração quando integramos dv para completar a parte da tabela no início do processo de integração por partes. Esta questão será tratada em PP7-2.

Substituição Trigonométrica

A substituição trigonométrica é geralmente tratada como um tópico separado em livros de cálculo. A única coisa diferente a respeito desta substituição é que a mudança de variável é usada envolvendo uma função trigonométrica. O método pode ser usado em certos casos de funções algébricas assim como integrais puramente trigonométricas.

Exemplo7-5

Avalie $c := \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100}} dx$ usando o método de substituição trigonométrica.

Resolução: Sendo $x = 10 \tan(q)$. A integral se torna

>c1 := changevar(x = 10*tan(theta), c, theta);

$$c1 := \int \frac{10 + 10 \tan(q)^2}{\sqrt{100 \tan(q)^2 + 100}} dq$$

A integral parece complicada: Podemos simplificar o radical?

>c2 := simplify(c1, symbolic);

$$c2 := \int \sqrt{1 + \tan(q)^2} dq$$

Sua vez. Complete o problema, dado que $\int \sec(q) dq = \ln(\sec(q) \tan(q))$

Frações Parciais

A integral $\int \frac{x^2 - 10x + 21}{x^3 - 7x + 6} dx$ parece imponente, mas pode ser reescrita como a soma de três frações. A técnica é chamada método de frações parciais.

Você recebe três frações e tem que achar a soma, você forma um denominador comum e soma. O método de frações parciais é o reverso do processo, que tem como objetivo achar as três frações originais. E desta forma a integral é reduzida em três problemas mais simples.

O primeiro passo é fatorar o integrando, no que o Maple pode ser uma grande ajuda:

```
>e1 := (x^2-10*x+21)/(x^3-7*x+6);
```

$$e1 := \frac{x^2 - 10x + 21}{x^3 - 7x + 6}$$

```
>e2 := factor(e1);
```

$$e2 := \frac{(x-3)(x-7)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

O fato do numerador de e2 ter sido fatorado não é tão importante quanto fatorar o denominador. Usando os fatores do denominador nós inventamos três novas frações.

```
>e3 := A/(x-1)+B/(x-2)+C/(x+3);
```

$$e3 := \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Já que e3 deve ser igual a e2, trazemos e3 a um denominador comum mais uma vez

```
>e4 := normal(e3);
```

$$e4 := \frac{Ax^2 + Ax - 6A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx^2 - 3Cx + 2C}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

O numerador de e4 deveria ser o mesmo numerador de e2. Logo, logo deveria ser o mesmo de e1. Podemos reunir os termos no numerador de e4 como uma preliminar para equacionar-la no numerador de e1:

```
>e5 := collect(numer(e4), x);
```

$$e5 := (A+B+C)x^2 + (-3C+2B+A)x + 2C-3B-6A$$

Se as duas frações forem equivalentes, a expressão e5 deve ser idêntica ao numerador de e1, então formamos a equação.

```
>e6 := e5 = numere1);
```

$$e6 := (A+B+C)x^2 + (-3C+2B+A)x + 2C-3B-6A = x^2-10x+21$$

Esta equação deve ser uma identidade, pois deve ser verdadeira para qualquer escolha possível de x . Sendo este o caso, podemos formar três equações separadas equacionando os coeficientes de x^2 , x e o termo constante.

>eq1 := A+B+C=1; eq2 := -3*C+2*B+A=-10; eq3 := 2*C-3*B-6*A = 21;

eq1 := A+B+C=1

eq2 := -3C+2B+A=-10

eq3 := 2C-3B-6A = 21

Verifique estas equações cuidadosamente e compare com e6, pois reentramos os dados e é importante nos prevenir de erros.

Temos três equações e três incógnitas. A solução é

>s1 := solve({eq1, eq2, eq3}, {A, B, C});

s1 := {A = -3, C = 3, B = 1}

Já que vamos usar estes valores usamos o comando assign.

>assign(s1);

Agora estes valores estão determinados para A, B e C, a expressão e3 é:

>e3;

$$-\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3}$$

Agora apenas para ter certeza podemos pedir ao Maple para somar as três frações.

>normal(e3);

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Desta forma podemos verificar de e3 é idêntica a e1.

O integrando original foi substituído por três integrandos pois a integral de uma soma é igual a soma das integrais:

>e7 := Int(e3, x) = Int(op(1, e3), x) + Int(op(2, e3), x) + Int(op(3, e3), x);

$$e7 := \int -\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3} dx = \int -\frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{3}{x+3} dx$$

Desta vez, deixamos o Maple realizar a expansão ao invés de copiar os termos.

As integrais em e7 são todas da forma $\int \frac{1}{x} dx$ e logo são elementares. A integral é

>e8 := Int(e3, x)= int(e3, x);

$$e8 := \int -\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3} dx =$$

$$-3\ln(x-1) + \ln(x-2) + 3\ln(x+3)$$

Podemos confirmar o resultado por diferenciação:

>normal(diff(rhs(e8), x));

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Esta é e1 com o denominador fatorado, logo a solução está correta.

Nós incluímos o método de frações parciais e mostramos a solução passo a passo não simplesmente por conta da utilidade da técnica, mas porque ela apresenta a oportunidade de utilizar o Maple para uma variedade de manipulações algébricas. É importante lembrar que alguém com experiência o bastante pode usar a conversão do Maple para o comando de fração parcial

>convert(e1, parcfac, x);

$$-\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3}$$

Isto completa a conversão em apenas um passo.

Exemplo 7-6

Ache a antiderivada de

>e10 := (4*x+4)/((x^3+4*x));

$$e10 := \frac{4x + 4}{x^3 + 4x}$$

Resolução: A dificuldade deste exemplo é tentar achar fatores aceitáveis do denominador sem entrar na área dos números complexos. É uma boa idéia tentar uma solução no papel antes de olhar para a resolução a seguir.

A solução para a situação de ter um quadrático irredutível no denominador é escrever as duas frações como $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$; isto é, generalizar o numerador, mas sempre o faá um grau a menos que o denominador. Para economizar tempo e espaço, agora que conhecemos o método, podemos usar convert:

>e11 := convert(e10, parfrac, x);

$$e11 := \frac{1}{x} + \frac{x+4}{x^2+4}$$

O segundo integrando é facilmente transformável em dois integrandos adicionais. O primeiro na forma $1/u$ (pela transformação $u = x^2$, e o segundo se refere a substituição trigonométrica).

A integral é

>Int(e10, x) = int(e11, x);

$$\int \frac{4x+4}{x^3+4x} dx = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \arctan\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Você pode ver como simples integrando se transformam em integrais complicadas.

Sua vez. Ache a antiderivada de $e1yt := \frac{3x+2}{x(x^2+2)^2}$ pelo método de frações parciais.

Resposta: _____

Nota: Este é um problema difícil. O Maple pode fazer a integração sem ajuda?

Integração Numérica

Você viu no capítulo 5 como retângulos podem ser usados para aproximar a área abaixo de uma curva $f(x)$. Isto forma a base da abordagem mais simples de encontrar a aproximação numérica da área abaixo de uma curva. Se formarmos retângulos cujas alturas por $f(x)$ ao centro de cada intervalo, estamos usando a regra do ponto médio para integração numérica. Lembre-se que o comando do Maple que aplica esta regra é **>value(middlesum(f(x), x = a .. b))**; Esta é a abordagem mais direta para integração numérica.

Uma regra um pouco mais elaborada para integração numérica é baseada em formar trapézios ao invés de retângulos. O intervalo $x = a .. b$ é dividido em n regiões iguais assim como antes, só que desta vez um trapézio é formado pela junção dos pontos onde as linhas verticais interseccionam $f(x)$ com uma linha reta. Isto significa que $f(x)$ é aproximado por n segmentos de linha reta e no processo trapézios são formados.

Exemplo 7-7

Derive a fórmula para a aproximação da área abaixo da curva pela regra do trapézio.

Resolução Divida o intervalo $x = a \dots b$ em n regiões iguais. Que seja $h = b - \frac{a}{n}$ o comprimento de qualquer destes subintervalos, e construa as linhas verticais até a função $f(x)$. A área de um trapézio é $\frac{1}{2}(h(y_i + y_{i+1}))$ onde y_i e y_{i+1} são as alturas correspondentes a $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$ (quaisquer duas linhas verticais adjacentes que forem formadas pela subdivisão do intervalo $x = a \dots b$).

Somando todos os trapézios, $\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$.

Todos menos o primeiro e o último termos y , y_0 e y_n , aparecem duas vezes. Juntando estes termos, a soma é

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \frac{h}{2} \left(y_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right) \quad (7-1)$$

Exemplo 7-8

Aproxime a Integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ usando a regra do trapézio e subdividindo o intervalo de integração em 100 partes.

Resolução: Aplique a regra do trapézio. Equação 7-1, com $h = 0.01$. Temos que expressar as constantes nas exponenciais como números decimais, ou envolver o comando `evalf` no comando todo. De qualquer forma, isto faz com que as exponenciais sejam avaliadas como números decimais.

```
>evalf(0.01.2*(exp(-0^2)+2*sum(exp(-(x/100)^2), x = 1 .. 99)+exp(-1^2)));
```

.7468180010

Nenhum dos métodos de integração discutidos até agora neste livro parece poder resolver $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ analiticamente. Vejamos se o Maple sabe como fazê-lo.

>int(exp(-x^2), x = 0 .. 1);

$$\frac{1}{2} \operatorname{erf}(1) \sqrt{p}$$

Este caso onde o Maple reporta um resultado, mas a função não é elementar. Uma referência é dada se você recorrer a página do help para esta função (?erf). Não vamos discutir esta função mais a fundo aqui, mas podemos pedir ao Maple o valor da integral usando evalf.

>evalf(int(exp(-x^2), x = 0 .. 1));

.7468241330

A aproximação numérica da integral achada usando a regra do trapézio com $h = 100$, e precisão de 5 casas decimais. Talvez você queira checar a precisão usando *middlesum* com 100 retângulos na mesma integral.

Sua vez. Use a regra do trapézio com $h = 100$ para aproximar $\int_0^{\frac{p}{x}} \frac{\sin(x)}{x} dx$. Qual a precisão da regra do trapézio neste caso?

Resposta: _____

Regra de Simpson

Ao invés de aproximar o gráfico de $f(x)$ com segmentos de linhas retas, poderíamos usar pequenas partes de parábolas que são seqüencialmente arranjadas em grupos de três pontos (são necessários três pontos para definir uma parábola). Um agrupamento representativo são os três pontos $f(x)$, $f(x+h)$, e $f(x+2h)$. A regra de Simpson usa este agrupamento para encaixar uma parábola numa curva $f(x)$ e $f(x+2h)$, $f(x+3h)$ e $f(x+4h)$ para encaixar outra parábola na próxima parte da curva $f(x)$. A regra de Simpson resulta de achar a fórmula da soma de todas estas partes de parábolas. É similar à regra do trapézio, porém um pouco mais complicada.

Regra de Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (7-2)$$

Os valores de y tem o mesmo significado no caso da fórmula do trapézio. A fórmula diz para dividir o intervalo em um número par de intervalos; some os valores finais, $f(a)$ e $f(b)$, a quatro vezes a função avaliada nos números de y ímpares e duas vezes a função avaliada

nos números de y pares; então multiplique todo o resultado por $h/3$. Agora você vê porque as fórmulas são bem mais úteis que palavras na maioria dos casos! São necessárias

Muito mais palavras para descrever a mesma idéia, mas aqui, a idéia chave é pegar quatro vezes os valores funcionais ímpares e duas vezes os valores funcionais pares. Surpreendentemente, unindo as informações desta forma produz um resultado mais preciso.

Exemplo 7-9

Aproxime a integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ usando a regra de Simpson e subdividindo o intervalo de integração em 100 partes.

Resolução: é a mesma situação do exemplo anterior, exceto que desta vez, a regra de Simpson deve ser usada.

```
>0.01/3*(exp(-0^2)+4*sum(exp(-((2*x+1)/100.)^2), x = 0 .. 49)+2*sum
(exp(-((2*x)/100.)^2), x = 1 .. 49)+exp(-1.^2));
```

.7468241324

O resultado tem precisão de 8 casas decimais, quase o dobro da regra do trapézio, só são necessários alguns cálculos a mais.

Sua vez. Use a regra de Simpson com $h = 100$ para aproximar $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{x} dx$. Qual a precisão da integração numérica deste caso?

Resposta: _____

O Maple usa uma combinação de análises e técnicas numéricas quando você pede para fornecer uma resposta numérica de uma integral. Você deveria fazer o mesmo. Se você tem que avaliar uma integral, primeiro pergunte se a integral pode ser expressada simbolicamente. Se não for possível, você deve plotar o integrando, novamente para ter a melhor visualização possível do problema. Ai você pode aplicar a integração numérica com confiança.

Exercícios de Papel e Lápis

PP7-1

Já que este capítulo trata de usar o Maple para realizar integrações, não há grande necessidade de papel lápis, então estes exercícios são poucos. Para dar uma idéia da

quantidade de trabalho numérico que tem que ser feito, realize a regra de Simpson à mão na integral

Tabela 7.3

Integração por partes sem constante de integração.

$u = \arctan(x)$	$dv = x$
$du = \frac{dx}{1+x^2}$	$v =$

$\int_0^4 4x - x^2 + 3$ usando apenas 5 pontos ($h=1$). Compare a sua resposta numérica com o valor que você calcular simbolicamente e avaliando a antiderivada em $x = 0$ e $x = 4$.

Resposta: _____

PP7-2

Quando aplicando a fórmula de integração por partes, a constante de integração é geralmente ignorada quando achando a antiderivada de dv . Tente integrar $c := \int x \arctan(x) dx$ por partes, com $u = \arctan(x)$ e $dv = x$. Complete a tabela 7.3 e veja onde consegue chegar na solução.

Agora tente integração por partes usando a constante de integração. Use a tabela 7.4

Você percebe que pode fatorar a expressão para v logo simplificando o problema? Qual é a integral.

Resposta: _____

Tabela 7.4

Integração por partes com a constante de integração.

$u = \arctan(x)$	$dv = x$
$du = \frac{dx}{1+x^2}$	$v = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

PP7-3

Reduza integral a uma forma mais simples pelo método indicado. Não há necessidade de realizar a integração à mão.

(a) $\int \frac{3x}{x^2+1} dx$, substituição $u=x^2+1$ Resposta: _____

(b) $\int e^x \sqrt{4+e^x} dx$, substituição: $u = 2+e^x$ Resposta: _____

(c) $\int \ln(x) dx$, Integração por partes Resposta: _____

(d) $\int x \arctan(x) dx$, integração por partes Resposta: _____

(e) $\int \tan(x)^2 dx$, substituição trigonométrica Resposta: _____

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, Substituição trigonométrica: $x = \sin(q)$

Resposta: _____

Maple Lab**ML7-1**

Use *intparts* para integrar $c := \int x \arctan(x) dx$. Talvez você tenha que resolver uma equação contendo uma integral. Forneça a resolução completa e descreva todos os passos aqui:

Resposta: _____

ML7-2: Regra do Trapézio

(a) Derive a fórmula do trapézio cuja base, h , se posiciona ao longo do eixo x e cujas alturas são y_1 e y_2 .

Resposta: _____

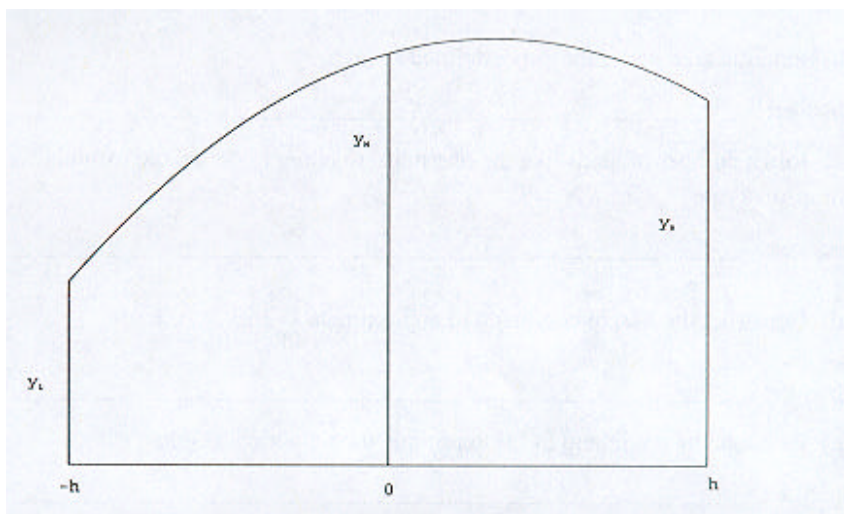


Figura 7.1 Encaixando uma quadrática ao topo das três alturas y_l , y_m , y_r .

(b) Use a regra do trapézio com 100 intervalos para integrar $\ln(\ln(x))$, $x = 10 \dots 20$.

Resposta: _____

(c) Use o Maple para realizar a mesma integração. Qual a porcentagem de erro usando (b)?

Resposta: _____

ML7-3: A regra de Simpson

(a) Encaixe o quadrático Ax^2+Bx+C aos três pontos $(-h, y_l)$, $(0, y_m)$ e (h, y_r) , onde y_l , y_m e y_r são as alturas da função $f(x)$ em três pontos igualmente espaçados (Figura 7.1). Determine os coeficientes A , B e C substituindo os três pontos conhecidos na forma quadrática e resolvendo as equações resultantes de A , B e C . Resuma seu método de solução aqui.

Resposta: _____

(b) Ache a área abaixo da curva definida em (a).

Resposta: _____

(c) Reúna um número de áreas como a de (b) para derivar a fórmula para a regra de Simpson.

Resposta: _____

(d) Construa o comando do Maple para aproximar $\int_0^{20} \ln(\ln(x)) dx$.

Resposta: _____

(e) Avalie o comando em (d) para fornecer um resultado numérico.

Resposta: _____

(f) Compare a precisão da regra de Simpson com a regra do trapézio para esta integral.

Resposta: _____